ENSAIT

Ecole Nationale Supérieure
des Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A - 2002

EPREUVE de MATHEMATIQUES 2

Durée 2 heures

(tous les candidats)

L'USAGE DES CALCULATRICES EST INTERDIT

DEFINITIONS ET NOTATIONS

•Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[[1,n]]$ l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre 1 et n .

•Pour tout nombre complexe z on note $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire, $|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué.

•On note $M_{n,1}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices colonnes ayant n lignes. Pour toute matrice colonne Z on note z_k le coefficient de Z situé ligne k .

•La transposée d'une matrice colonne Z est notée ${}^tZ$.

•Pour toute matrice colonne Z on note $\overline{Z}$ la matrice conjuguée de Z , c'est à dire la matrice colonne $Y = \overline{Z}$ définie par :$\forall k \in [[1,n]]$, $y_k = \overline{z_k}$.

•Pour toute matrice colonne Z on note

$$\|Z\| = \sqrt{{}^t\overline{Z}Z} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$$

•On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ on note $m_{k,j}$ le coefficient de M situé ligne k , colonne j .

•Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ on appelle valeur propre de M tout complexe λ tel qu'il existe une matrice colonne $Z \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, non nulle telle que $MZ = \lambda Z$. Z est une matrice propre associée à la valeur propre λ .

Attention : les matrices sont à coefficients réels mais on cherche à étudier les valeurs propres réelles ou non de cette matrice.

•Le but du problème est de prouver quelques inégalités reliant les valeurs propres et les coefficients de la matrice.

•On posera pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sup\left(|m_{k,j}|\,,(j,k) \in [[1,n]]^2\right), \\
\beta &= \sup\left(\frac{|m_{k,j}+m_{j,k}|}{2}.(j,k) \in [[1,n]]^2\right), \\
\gamma &= \sup\left(\frac{|m_{k,j}-m_{j,k}|}{2}.(j,k) \in [[1,n]]^2\right)
\end{aligned}$$

PREMIERE PARTIE

Exemple si n=2

Dans cette partie on prend $n = 2$ et on considère $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée 2×2 à coefficients réels.
Soit λ une valeur propre de M.
On a donc $\beta = \max\left(|a|, |d|, \frac{|b-c|}{2}\right)$.

1. On suppose que λ est réel . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ une matrice propre associée. On passe en coordonnées polaires en posant $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$.

   - En calculant ${}^tXMX$ de deux façons différentes montrer :
   $$\lambda = a\left(\cos(\theta)\right)^2 + d\left(\sin(\theta)\right)^2 + (b+c)\sin(\theta)\cos(\theta)$$
   - Montrer $|\lambda| \leq \beta\left(|\sin(\theta)| + |\cos(\theta)|\right)^2$.
   - Montrer :
   $$|\lambda| \leq 2\beta$$
   - Déterminer les matrices M telles que M possède une valeur propre réelle vérifiant $|\lambda| = 2\beta$.

2. On suppose que λ n'est pas réel.

   - Montrer que λ est racine du polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
   - Montrer que : $|\mathrm{Re}(\lambda)| \leq \beta$. On a donc aussi $|\mathrm{Re}(\lambda)| \leq 2\beta$
   - Exprimer $(\mathrm{Im}(\lambda))^2$ en fonction de a, b, c et d .
   - Montrer que $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq \frac{1}{2}|b-c|$.
   - Déterminer les matrices M telles que M possède une valeur propre non réelle vérifiant:
   $$|\mathrm{Im}(\lambda)| = \frac{1}{2}|b-c|.$$

DEUXIEME PARTIE

Etude du cas général

Dans cette partie n est quelconque ($n \geq 2$) et M est une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réels.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^p$ on considère le produit scalaire canonique:
$$\forall x = (x_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p, \forall y = (y_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p, \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i$$
   - Enoncer l'inégalité de Cauchy Schwarz .
   - Montrer $\forall (x_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p$. $\left(\sum_{i=1}^p x_i\right)^2 \leq p\sum_{i=1}^p x_i^2$.
   - Dans quel cas a-t-on $\left(\sum_{i=1}^p x_i\right)^2 = p\sum_{i=1}^p x_i^2$?

2. Montrer que pour une matrice $Z \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ on a :

$$^t\overline{Z}MZ = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,j}\overline{z_k}z_j\right)$$

3.

- Soient $z \in \mathbb{C}$ et $Z \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ montrer que:

$$\|zZ\| = |z|\ \|Z\|$$

- Montrer que pour toute valeur propre réelle ou non λ de M il existe une matrice propre associée X vérifiant $\|X\| = 1$.

Dans la suite du problème on considère λ une valeur propre réelle ou non de M et X une matrice propre associée telle que $\|X\| = 1$ et on note x_k le coefficient de X situé sur la ligne k .

- Montrer

$$\lambda = {}^t\,\overline{X}MX$$

4. On rappelle que $\alpha = \sup\left(|m_{k,j}|\,,(j,k) \in [[1,n]]^2\right)$. Montrer

$$|\lambda|^2 \leq \alpha^2\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k x_j|\right)^2$$

En déduire

$$|\lambda| \leq n\alpha$$

5.

- Montrer

$$2\,\mathrm{Re}(\lambda) = {}^t\,\overline{X}\left(M + {}^t\,M\right)X$$

- On rappelle que $\beta = \sup\left(\frac{|m_{k,j}+m_{j,k}|}{2},(j,k) \in [[1,n]]^2\right)$. Montrer

$$|\mathrm{Re}\,\lambda)| \leq n\beta$$

- Que peut-on en déduire pour les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle?

6.

- Montrer

$$2i\,\mathrm{Im}(\lambda) = {}^t\,\overline{X}\left(M - {}^t\,M\right)X$$

- On rappelle que $\gamma = \sup\left(\frac{|m_{k,j}-m_{j,k}|}{2},(j,k) \in [[1,n]]^2\right)$. Montrer que

$$|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq n\gamma$$

- Quel résultat classique sur les matrices symétriques réelles peut-on déduire de la question précédente?

TROISIEME PARTIE

On veut améliorer l'inégalité précédente pour montrer : $|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq \gamma\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$

1. Soient z_1 et z_2 deux complexes montrer que:

$$\left|\overline{z_1}z_2 - \overline{z_2}z_1\right|^2 = 2\left|z_1\right|^2\left|z_2\right|^2 - \left(\overline{z_1}^2 z_2^2 + \overline{z_2}^2 z_1^2\right)$$

2. Soit $Z \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant $\|Z\| = 1$ montrer que :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{z_j}z_k - \overline{z_k}z_j\right|^2\right) \leq 2$$

- Montrer

$$4\left|\mathrm{Im}(\lambda)\right|^2 \leq n(n-1)\gamma^2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{x_j}x_k - \overline{x_k}x_j\right|^2\right)$$

- En déduire :

$$|\mathrm{Im}(\lambda)| \leq \gamma\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$